ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x-i}\,dx.$$

2. Функция $u\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R},$$

$$u(0,y)=y^2,\quad u\in\mathbb{R}.$$

Найти функцию $u(x,y)$ и вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} u(x,y)\,dy,$$

где кривая γ — это граница области $\left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{smallmatrix} x^2+y^2<1,\\ x>0,\ y>0\end{smallmatrix}\right\}$, ориентированная против часовой стрелки.

3. Найти минимум функционала

$$J(u)=\int\limits_0^1\frac{\exp(u'(x))}{x+1}\,dx,\quad u\in C^2[0,1],$$

на множестве $M=\left\{\ u\in C^2[0,1]\ \middle|\ u(0)=0,\ \ u(1)=0\ \right\}$, и указать экстремаль, доставляющую минимум.

4. Три лыжника независимо спускаются с горы, каждый с вероятностью $\frac{1}{3}$ может упасть, а, упав дважды, сходит с трассы. Найти вероятность того, что хотя бы один лыжник дойдёт до финиша, если известно, что не менее двух лыжников хоть раз упали.

5. Решить задачу Коши

$$(2x+1)u''(x)-u'(x)=0,\quad x>0,$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)=1.$$

6. Решить уравнение

$$u(x) = \int\limits_0^x u(t)\,dt + \exp(x), \quad x \geq 0.$$

7. Решить задачу Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(0,x) = \exp(ix), \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \Delta u(t,x,y), \quad t > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0,x,y) = \exp(-x^2)\sin y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x,y,z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u(0,x,y,z) = \operatorname{th}(x - y + z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\frac{\partial u(0,x,y,z)}{\partial t} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

10. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1} = xy^2.$$

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
1.	$\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x-i}\,dx = \frac{\pi}{e}$, так как $\int\limits_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{x-i}\,dt \to 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=i} \frac{\exp(iz)}{z-i} = \frac{2\pi i}{e}, \quad \int\limits_{-R}^{R} \frac{\exp(-ix)}{x-i}\,dt \to 0,$
2.	$u(x,y) = \left(\dfrac{x^2}{2} + y\right)^2, \qquad \oint\limits_{\gamma} u(x,y)\,dy = \dfrac{23}{60}$
3.	$u_*(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln 4, \qquad J(u_*) = \dfrac{e}{4}$
4.	$\dfrac{188}{189} = 1 - P(A_0\|B) = 1 - \dfrac{P(A_0B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{P(A_0)}{P(B)} = 1 - \dfrac{1}{7\cdot 27}$ событие A_0 — ни один лыжник не дошёл до финиша, событие B — не менее двух лыжников хоть раз упали, $A_0 \subset B, \quad \Rightarrow \quad P(A_0B) = P(A_0) = \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \left(\frac{1}{27}\right)^2,$ $P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{27}$
5.	$u(x) = \dfrac{(2x+1)^{3/2} - 1}{3}$

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
6.	$u(x) = (x+1)\exp(x)$, $u'(x) = u(x) + \exp(x), \quad u(0) = 1$
7.	$u(t,x) = \exp\big(i(t+x)\big)$
8.	$u(t,x,y) = \dfrac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t+1} - t\right)\sin(y)}{\sqrt{4t+1}}$
9.	$u(t,x,y,z) = \dfrac{\operatorname{th}\left(x-y+z-\sqrt{3}t\right) + \operatorname{th}\left(x-y+z+\sqrt{3}t\right)}{2}$
10.	$u(t,x,y) = \dfrac{r\cos\varphi - r^3\cos(3\varphi)}{4} = \dfrac{x - x^3 + 3xy^2}{4}$, где $\quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

Стоимость каждой задачи — два очка.